

1. В угол вписаны две касающиеся внешним образом окружности. Длина большей из них равна 12π см, расстояние от ее центра до вершины угла равно 30 см. Найдите длину меньшей окружности.

2. В угол вписаны две касающиеся внешним образом окружности. Длина меньшей из них равна 4π см, расстояние от ее центра до вершины угла равно 10 см. Найдите длину большей окружности.

3. Найдите значение выражения $\sqrt{19 - 6\sqrt{2}} + \sqrt{43 - 30\sqrt{2}}$.

4. Найдите значение выражения $\sqrt{13 - 4\sqrt{3}} + \sqrt{37 - 20\sqrt{3}}$.

5. Около правильного многоугольника описана окружность, и в этот же многоугольник вписана еще одна окружность. Площадь кольца, ограниченного этими окружностями, равна 64π см². Найдите длину стороны многоугольника.

6. Около правильного многоугольника описана окружность, и в этот же многоугольник вписана еще одна окружность. Площадь кольца, ограниченного этими окружностями, равна 36π см². Найдите длину стороны многоугольника.

7. Четырехугольник ABCD описан около окружности. Найдите AB и BC, если угол $\angle ABC = 90^\circ$, угол $\angle ADC = 60^\circ$, $AD = 16$ см, $CD = 30$ см.

8. Четырехугольник ABCD описан около окружности. Найдите AB и BC, если угол $\angle ABC = 90^\circ$, угол $\angle ADC = 60^\circ$, $AD = 8$ см, $CD = 15$ см.

9. Вершины треугольника ABC лежат на окружности, $AB : BC = 2 : 3$. Точка D делит дугу AC пополам. Отрезок BD пересекает сторону AC в точке E. Через точку E проведена хорда KM, причем $KE = 4$ см, $ME = 6$ см. Найдите AC.

10. Вершины треугольника ABC лежат на окружности, $AB : BC = 2 : 3$. Точка D делит дугу AC пополам. Отрезок BD пересекает сторону AC в точке E. Через точку E проведена хорда KM, причем $KE = 8$ см, $ME = 12$ см. Найдите AC.

11. Около окружности радиуса $4\sqrt{3}$ см описан правильный треугольник. На его высоте как на стороне построен правильный шестиугольник, в который вписана другая окружность. Найдите ее радиус.

12. В окружность радиуса $4\sqrt{3}$ см вписан квадрат. На его диагонали как на стороне построен правильный треугольник, в который вписана другая окружность. Найдите ее радиус.

13. Три окружности, радиусы которых 6 см, 2 см и 4 см, касаются друг друга внешним образом. Найдите длину окружности, проходящей через центры данных окружностей.

14. Три окружности, радиусы которых 12 см, 4 см и 8 см, касаются друг друга внешним образом. Найдите длину окружности, проходящей через центры данных окружностей.

15. Диагонали равнобедренной трапеции взаимно перпендикулярны. Найдите площадь трапеции, если ее основания равны 5 см и 15 см.

16. Диагонали равнобедренной трапеции взаимно перпендикулярны. Найдите площадь трапеции, если ее основания равны 7 см и 13 см.

17. Скорость поезда увеличилась с 70 км/ч до 90 км/ч. На сколько процентов уменьшилось время, затрачиваемое поездом на один и тот же путь?

18. Скорость автомобиля уменьшилась с 80 км/ч до 60 км/ч. На сколько процентов увеличилось время, затрачиваемое автомобилем на один и тот же путь?

19. Две стороны треугольника равны 7 см и 8 см, его площадь равна $16\sqrt{3}$ см². Найдите сумму квадратов значений, которые может принимать третья сторона треугольника.

20. Две стороны треугольника равны 6 см и 8 см, его площадь равна $9\sqrt{7}$ см². Найдите сумму квадратов значений, которые может принимать третья сторона треугольника.

21. Докажите, что значение выражения $2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2}$ кратно 14 при $n \in \mathbb{N}$.

22. Докажите, что значение выражения $3^n + 3^{n+1} + 3^{n+2}$ кратно 39 при $n \in \mathbb{N}$.

23. Большее основание равнобедренной трапеции равно боковой стороне, а диагонали делятся точкой пересечения в отношении 3 : 13. Найдите площадь трапеции, если ее высота равна 24 см.

24. Меньшее основание равнобедренной трапеции равно боковой стороне, а диагонали делятся точкой пересечения в отношении 5 : 11. Найдите площадь трапеции, если ее высота равна 20 см.

25. Через концы диаметра AB к окружности проведены две касательные AM и BN. Третья касательная пересекает первые две в точках C и D так, что $C \in AM$, $D \in BN$. Найдите радиус окружности, если $CA = 2\sqrt{3}$, $DB = \sqrt{3}$.

26. Через концы диаметра AB к окружности проведены две касательные AM и BN . Третья касательная пересекает первые две в точках C и D так, что $C \in AM$, $D \in BN$. Найдите радиус окружности, если $CA = 2\sqrt{5}$, $DB = \sqrt{5}$.

27. Центр окружности, описанной около трапеции, лежит на одном из оснований этой трапеции. Найдите площадь трапеции, если ее боковая сторона равна 4 см, а один из ее углов равен 120° .

28. Центр окружности, описанной около трапеции, лежит на одном из оснований этой трапеции. Найдите площадь трапеции, если радиус окружности равен 2 см, а один из углов трапеции — 120° .

29. Пусть $a = \sqrt{10} - \sqrt{11}$. Докажите, что значение выражения $a^2 + \frac{1}{a^2}$ является целым числом.

30. Пусть $m = \sqrt{6} - \sqrt{7}$. Докажите, что значение выражения $\frac{1}{m^2} + m^2$ является целым числом.

31. Сравните значения выражений $f(29 - 8\sqrt{13})$ и $g(4 + \sqrt{13})$, если $f(x) = \sqrt{x}$, а $g(x) = \frac{3}{x}$.

32. Сравните значения выражений $f(27 - 8\sqrt{11})$ и $g(4 + \sqrt{11})$, если $f(x) = \sqrt{x}$, а $g(x) = \frac{5}{x}$.

33. Функция $y=f(x)$ определена на множестве действительных чисел R , является нечетной и для $x \geq 0$ задается формулой $f(x) = x^2 - 2x$. Найдите значения выражения $2f(-\sqrt{3}) - f(-2\sqrt{3})$.

34. Функция $y=f(x)$ определена на множестве действительных чисел R , является нечетной и для $x \geq 0$ задается формулой $f(x) = x^2 - 3x$. Найдите значения выражения $3f(-\sqrt{2}) - f(-3\sqrt{2})$.

35. Площадь вписанного в правильный многоугольник круга в 4 раза меньше площади круга, описанного около этого многоугольника. Найдите периметр многоугольника, если его площадь равна $4\sqrt{3}$ см².

36. Площадь круга, описанного около правильного многоугольника, в 4 раза больше площади круга, вписанного в этот многоугольник. Найдите периметр многоугольника, если его площадь равна $16\sqrt{3}$ см².

37. В треугольнике ABC известно, что $AB = 2$ см и $AC = 4$ см. Медиана, проведенная из вершины A , равна $\sqrt{3}$ см. Найдите угол A данного треугольника.

38. В треугольнике ABC известно, что $AB = 6$ см и $AC = 10$ см. Медиана, проведенная из вершины A , равна $\sqrt{19}$ см. Найдите угол A данного треугольника.

39. В треугольнике ABC проведена медиана BM , угол $ABC = 105^\circ$, $AC = 12\sqrt{2}$ см. Радиус окружности, описанной около треугольника MBC , равен $2\sqrt{6}$ см. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABM .

40. В треугольнике ABC проведена медиана BM , угол $ABC = 105^\circ$, $AC = 18\sqrt{2}$ см. Радиус окружности, описанной около треугольника AMB , равен $3\sqrt{6}$ см. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника BMC .

41. В трапеции $ABCD$ AD и BC — основания, O — точка пересечения диагоналей. Площадь треугольника AOB равна 12 см², $BC : AD = 3 : 4$. Найдите площадь трапеции.

42. В трапеции $ABCD$ AD и BC — основания, O — точка пересечения диагоналей. Площадь треугольника COD равна 15 см², $BC : AD = 3 : 5$. Найдите площадь трапеции.

43. В окружность радиуса $3\sqrt{3}$ см вписан квадрат. Из одной вершины этого квадрата проведены две хорды, стягивающие дуги по 120° . Найдите длину отрезка диагонали квадрата, заключенного между этими хордами.

44. В окружность радиуса $6\sqrt{3}$ см вписан квадрат. Из одной вершины этого квадрата проведены две хорды, стягивающие дуги по 120° . Найдите длину отрезка диагонали квадрата, заключенного между этими хордами.

45. В равнобедренной трапеции угол между диагоналями равен 90° , средняя линия трапеции равна 6 см. Найдите площадь трапеции.

46. В равнобедренной трапеции угол между диагоналями равен 90° , средняя линия трапеции равна 8 см. Найдите площадь трапеции.

47. Две студенческие бригады могут выполнить задание, работая вместе, за 6 ч. За сколько часов может выполнить это задание каждая бригада, работая самостоятельно, если одной из них для выполнения $\frac{2}{5}$ задания необходимо на 4 ч больше, чем другой для выполнения $\frac{1}{5}$ задания?

48. Две студенческие бригады могут выполнить задание, работая вместе, за 2 дня. За сколько дней может выполнить это задание каждая бригада, работая самостоятельно, если одной из них для выполнения $\frac{1}{3}$ задания необходимо на 3 дня меньше, чем другой для выполнения $\frac{2}{3}$ задания?

49. Решите уравнение $(x^2 + 3x)^2 - 14x^2 - 42x + 40 = 0$.

50. Решите уравнение $(x^2 + 2x)^2 - 11x^2 - 22x + 24 = 0$.

51. Луч AM пересекает сторону BC параллелограмма $ABCD$ в точке M , а продолжение стороны CD — в точке N , причем $BM = 2MC$. Площадь треугольника MNC равна 20. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$.

52. Луч AM пересекает сторону BC параллелограмма $ABCD$ в точке M , а продолжение стороны CD — в точке N , причем $BM = 3MC$. Площадь треугольника MNC равна 30. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$.

53. В прямоугольном треугольнике один из углов равен 60° , расстояние от центра вписанной окружности до вершины прямого угла равно $4\sqrt{2}$ см. Найдите большую сторону этого треугольника.

54. В прямоугольном треугольнике один из углов равен 60° , расстояние от центра вписанной окружности до вершины прямого угла равно $6\sqrt{2}$ см. Найдите большую сторону этого треугольника.

55. Периметр параллелограмма равен 34 см, площадь равна 36 см^2 , синус острого угла равен $\frac{3}{5}$. Найдите большую диагональ параллелограмма.

56. Периметр параллелограмма равен 34 см, площадь равна 48 см^2 , синус острого угла равен $\frac{4}{5}$. Найдите большую диагональ параллелограмма.

57. В прямоугольную трапецию вписана окружность радиуса 4. Отношение длин оснований трапеции равно 2. Найдите площадь трапеции.

58. В прямоугольную трапецию вписана окружность радиуса 8. Отношение длин оснований трапеции равно 2. Найдите площадь трапеции.

59. Высота и меньшая диагональ ромба относятся как 4 : 5, периметр ромба равен 100 см. Найдите площадь ромба.

60. Высота и большая диагональ ромба относятся как 3 : 5, периметр ромба равен 200 см. Найдите площадь ромба.

61. В окружности проведены две хорды AB и CD , которые пересекаются в точке M . Докажите, что величина угла DMB равна половине суммы дуг AFC и BHD .

62. К окружности из точки M проведены две секущие MA и MB , которые пересекают окружность в точках A и C , B и D , как указано на рисунке. Докажите, что величина угла AMB равна половине разности дуг AFB и CHD .

63. Решите совокупность неравенств
$$\begin{cases} (x^2 - 12x + 36)(x^2 - 4) < 0, \\ \frac{x-7}{x} \leq 0. \end{cases}$$

64. Решите совокупность неравенств
$$\begin{cases} (x^2 - 14x + 49)(x^2 - 4) < 0, \\ \frac{x-9}{x} \leq 0. \end{cases}$$

65. Найдите область определения функции $g(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 3x + 7}{x + 1}} - \frac{x}{\sqrt{x^3 - 4x}}$.

66. Найдите область определения функции $g(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 2x + 5}{x + 2}} - \frac{x}{\sqrt{x^3 - 9x}}$.

67. В треугольнике ABC проведена высота BH . Биссектриса угла A делит высоту BH в отношении 5 : 3, считая от точки B . Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC , если $BC = 12$.

68. В треугольнике ABC проведена высота BH . Биссектриса угла C делит высоту BH в отношении 13 : 5, считая от точки B . Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC , если $AB = 48$.

69. В равнобедренном треугольнике ABC известно, что $AB = BC = 4$, медиана $AM = 3$. Найдите площадь круга с диаметром AC .

70. В равнобедренном треугольнике ABC известно, что $AB = BC = 6$, медиана $AM = 4$. Найдите площадь круга с диаметром AC .

71. Три числа являются последовательными членами геометрической прогрессии. Если среднее из них увеличить в 2 раза, то они станут последовательными членами арифметической прогрессии. Найдите знаменатель геометрической прогрессии.

72. Три числа являются последовательными членами геометрической прогрессии. Если среднее из них увеличить в 3 раза, то они станут последовательными членами арифметической прогрессии. Найдите знаменатель геометрической прогрессии.

73. Найдите площадь равнобедренной трапеции, в которую вписана окружность и точка касания делит боковую сторону на отрезки, равные 4 см и 9 см.

74. Найдите площадь равнобедренной трапеции, в которую вписана окружность и точка касания делит боковую сторону на отрезки, равные 2 см и 8 см.

75. Длина стороны ромба $ABCD$ равна 6, угол A равен 60° . Диагонали ромба пересекаются в точке O . Точка E лежит на стороне BC , причем $CE : BE = 1 : 2$. Найдите площадь треугольника COE .

76. Длина стороны ромба $ABCD$ равна 8, угол A равен 60° . Диагонали ромба пересекаются в точке O . Точка E лежит на стороне BC , причем $CE : BE = 1 : 3$. Найдите площадь треугольника COE .

77. Разложите на множители многочлен $4a^2 + b^2 - 4ab - 4a + 2b - 8$.

78. Разложите на множители многочлен $m^2 + 4n^2 + 4mn - 3m - 6n - 18$.

79. Прямоугольная трапеция описана около окружности. Точка касания делит большую боковую сторону на отрезки, равные 2 см и 8 см. Найдите площадь трапеции.

80. Прямоугольная трапеция описана около окружности. Точка касания делит большую боковую сторону на отрезки, равные 4 см и 9 см. Найдите площадь трапеции.